数理解析研究所講究録 1417 巻 2005 年 80-98

A priori estimate on the solutions to 2D NLS arising from Schrödinger maps

京都大学大学院・理学研究科　加藤 淳 (Jun Kato)*
Department of Mathematics, Kyoto University

1 序

本稿では modified Schrödinger map と呼ばれる, Schrödinger map から導出されるある非線型 Schrödinger 方程式系の初期値問題の適切性を空間 2 次元の場合に考察する. まず始めに, modified Schrödinger map の導出について簡単に述べる.

1.1 Schrödinger map について

始めに, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ から 2 次元球面 S^2 への Schrödinger map の定式化を述べる. まず, $\phi: S^2\setminus\{(0,0,1)\}\to\mathbf{C}$ を立体射影とするとき,

$$\phi^{-1}(w)=\Big(\frac{2\,\mathrm{Re}\,w}{1+|w|^2},\ \frac{2\,\mathrm{Im}\,w}{1+|w|^2},\ \frac{1-|w|^2}{1+|w|^2}\Big),\quad w\in\mathbf{C}$$

であることに注意して, 2 次元球面 S^2 を計量 $g(w)=2/(1+|w|^2)$ の入った複素平面 $(\mathbf{C},\,g\,dw\,d\overline{w})$ と同一視する. 特に, $|w|_g=|g(w)\,w|$, $w\in\mathbf{C}$ と書く.

写像 $z:\mathbf{R}^n\to(\mathbf{C},\,g\,dw\,d\overline{w})$ のエネルギーは

$$\begin{aligned}E(z)&=\frac{1}{2}\int_{R^n}|\nabla z(x)|_g^2\,dx\\&=\int_{R^n}\frac{1}{(1+|z(x)|^2)^2}|\nabla z(x)|^2\,dx\end{aligned}\tag{1.1}$$

* JSPS Research Fellow

により定義される. 上で定められたエネルギー汎関数 $E(z)$ の Euler-Lagrange 方程式は

$$\sum_{j=1}^{n} \nabla_j \partial_j z = 0 \tag{1.2}$$

で与えられる. 但し,

$$\nabla_j = \partial_j - \frac{2}{1+|z|^2}\,\overline{z}\,\partial_j z. \tag{1.3}$$

実際, Euler-Lagrange 方程式 (1.2) は w を任意の複素数値関数として, $\frac{d}{d\varepsilon}E(z+\varepsilon w)|_{\varepsilon=0} = 0$ を計算することで得られる. そこで, (1.2) を時間発展させた方程式

$$\partial_t z = i\sum_{j=1}^{n} \nabla_j \partial_j z \tag{1.4}$$

を Schrödinger map と呼ぶ. 因に虚数単位 i がなければ, 上記の方程式は heat flow として知られている. Schrödinger map (1.4) は, (1.3) より

$$i\partial_t z + \Delta z = \frac{2}{1+|z|^2}\,\overline{z}\sum_{j=1}^{n}(\partial_j z)^2 \tag{1.5}$$

と非線型項に微分が入った型の非線型 Schrödinger 方程式となっていることに注意しておく. また, Schrödinger map (1.4) は (1.1) で定めたエネルギー E を保存する. 即ち, z が (1.4) の解ならば

$$E(z(t)) = E(z(0)), \quad t > 0 \tag{1.6}$$

が成り立つ.

注意 1.1. 方程式 (1.5) は鉄磁性体 (ferromagnetic) のスピンシステムに対する Heisenberg model

$$\begin{aligned} &u : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to S^2 \subset \mathbf{R}^3, \quad n = 1, 2, 3, \\ &\partial_t u = u \times \Delta u \end{aligned} \tag{1.7}$$

からも立体射影を用いることで導出されることが知られている ([3], [6], [14] 参照). また, 関連する方程式としては, 上記の方程式の空間 2 次元の場合の一般化である Ishimori system が知られている ([10] 参照).

Schrödinger map はより一般に, (N, g, J) を計量 g, 概複素構造 J を持つ Riemann 面とするとき, 写像 $s : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to N$ に対し

$$\partial_t s = J \sum_{j=1}^{n} \nabla_j \partial_j s \tag{1.8}$$

により定式化される. ここで, ∇_j は誘導束 $s^{-1}TN$ 上の誘導接続を表す. 例えば, Chang-Shatah-Uhlenbeck [2] 参照.

コンパクトな Riemann 面 N への Schrödigner map の初期値問題

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} \partial_t s = J \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \nabla_j \partial_j s, \quad s : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to N, \\ s|_{t=0} = s_0 \end{cases}$$

に関しては, Chang-Shatah-Uhlenbeck [2] により, $n = 1$ の場合は $s_0 \in H^1(\mathbf{R})$ に対し一意な時間大域解が存在すること, $n = 2$ の場合は小さな $s_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$ に対し球対称性または equivariant symmetry の仮定の下で一意な時間大域解が存在することが示されている. 特に, (1.6) に見られるように, Schrödinger map は H^1 ノルムを保存するので, H^1 での可解性の考察は重要である. 彼等の手法は, Faddeev-Tkhtajan [6] が空間 1 次元の場合に, 鉄磁性体 (ferromagnetic) のスピンシステムに対する Heisenberg model (1.7) を, 非線型項に微分を含まない型の非線型 Schrödinger 方程式に変換する際に用いた Hasimoto 変換を一般化して, Schrödinger map の場合に適用することに基づいている. 実際, 彼等は空間 1 次元, 又は空間 2 次元で対称性を仮定する場合は Schrödigner map を, 非線型項に微分を含まない型の非線型 Schrödinger 方程式に変換できることを示し, 上記の結果を示している.

1.2 Modified Schrödinger map の導出

以下, 本稿では空間次元 $n = 2$ の場合に, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ から 2 次元球面 S^2 への Schrödinger map (1.4) の初期値問題に焦点を当てて考察する. 特に, エネルギークラスである H^1 での適切性を示すことが最終的な目標となる. そのような滑らかさの低いクラスで方程式 (1.4) の初期値問題を考察するため, 方程式を以下のように変換する. 以下で述べる変換は

Nahmod-Stefanov-Uhlenbeck [12] による.

Schrödinger map z 及び (1.3) で定められた ∇_j に対し, u_α, D_j を

$$u_\alpha = \frac{2}{1+|z|^2}\, e^{i\psi}\partial_\alpha z, \tag{1.9}$$

$$D_j = \frac{2}{1+|z|^2}\, e^{i\psi}\,\nabla_j\,(1+|z|^2)e^{-i\psi} \equiv \partial_j + iA_j \tag{1.10}$$

により定める. ここで, $\alpha = 0, \cdots, n$ であり, $\partial_0 = \partial_t$ とする. このとき方程式 (1.4) は

$$u_0 = i\sum_{j=1}^{n} D_j u_j, \tag{1.11}$$

また ∇_j と $\partial_j s$ が満たす条件

$$\nabla_j \partial_k s = \nabla_k \partial_j s, \quad [\nabla_j, \nabla_k] = -4i\,\mathrm{Im}(b_j \bar{b}_k),$$

はそれぞれ

$$D_j u_k = D_k u_j, \quad [D_j, D_k] = -4i\,\mathrm{Im}(u_j \overline{u}_k) \tag{1.12}$$

と書き換えられる. 但し $b_j = (1+|s|^2)^{-1}\partial_j s$ である. 特に, (1.11), (1.12) は (1.9), (1.10) における実数値関数 ψ の取り方によらず不変である. そこで, ψ を特に (1.10) で定めた A_j が

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j A_j = 0 \tag{1.13}$$

となるよう定める (Coulomb gauge). 因に, 条件 (1.13) を満たす (遠方で減衰する) ψ は一意に定まる. 条件 (1.11), (1.12), (1.13) から導出される, u_j の満たす非線型 Schrödinger 方程式を modified Schrödinger map と呼ぶ (詳しくは [12, Theorems 2.1, 2.2] 参照). 以下で見られるように, 変換 (1.9), (1.10) では空間 1 次元の場合の Hasimoto 変換の様に非線型項に微分が現れないようには出来ないが, エネルギー評価が使える型の方程式になることと, 微分を含む非線型項には条件 (1.13) に対応して Riesz ポテンシャルの作用する項が附随するということで, 滑らかさの低いクラスで取り扱いやすい型の方程式となっている.

2 主結果

以下, 空間 2 次元の場合に, 下記の modified Schrödinger map の初期値問題 (MS) の適切性を考察する.

$$i\,\partial_t u_1 + \Delta u_1 = -2i\,\boldsymbol{A}\cdot\nabla u_1 + A_0 u_1 + |\boldsymbol{A}|^2 u_1 + 4i\,\mathrm{Im}(u_2\overline{u}_1)u_2, \tag{2.1}$$

$$i\,\partial_t u_2 + \Delta u_2 = -2i\,\boldsymbol{A}\cdot\nabla u_2 + A_0 u_2 + |\boldsymbol{A}|^2 u_2 + 4i\,\mathrm{Im}(u_1\overline{u}_2)u_1, \tag{2.2}$$

$$u_1(0,x) = u_0^1(x), \quad u_2(0,x) = u_0^2(x), \quad x \in \mathbf{R}^2. \tag{2.3}$$

ここで, $u_j : [0,T]\times\mathbf{R}^2 \ni (t,x) \mapsto u(t,x) \in \mathbf{C}$, $j=1,2$ であり, 以下 $u=(u_1,u_2)$ とおく. また, $\boldsymbol{A} = (A_1[u], A_2[u])$, $A_0 = A_0[u]$ は

$$A_j[u] = 2\,G_j * \mathrm{Im}(u_1\overline{u}_2), \quad j=1,2, \tag{2.4}$$

$$G_1(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x_2}{|x|^2}, \quad G_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_1}{|x|^2}, \tag{2.5}$$

$$A_0[u] = -\sum_{j,k=1}^{2} 2R_jR_k\mathrm{Re}(u_j\overline{u}_k) + 2|u|^2 \tag{2.6}$$

で与えられる. ここで, $R_j = \partial_j(-\Delta)^{-1/2}$ は Riesz 変換である.

まず, $\boldsymbol{A}[u]$ の定義 (2.4), (2.5) より $\mathrm{div}\boldsymbol{A}[u]=0$ が成り立つことに注意する. このことは条件 (1.13) と整合する. 特に, $\mathrm{div}\boldsymbol{A}[u]=0$ と各 $A_j[u]$ が実数値であることから, 下の補題 2.1 で述べる (MS) の L^2 保存則が得られる. また, (2.5) で定義される G_j は空間 2 次元の場合の $(-\Delta)$ の基本解 $-(1/2\pi)\log|x|$ を 1 階微分したものである. 特に空間 2 次元の場合, $|x|^{-1}$ との合成積は -1 階の微分が作用しているものと見なせるので, 方程式 (2.1), (2.2) の主要部は丁度

$$i\partial_t u + \Delta u = i(D^{-1}|u|^2)Du \tag{2.7}$$

という形であると見なせる. 但し, $D=(-\Delta)^{1/2}$. 方程式 (2.7) の型の非線型項は, 非線型 Schrödinger 方程式の研究でそれぞれ良く扱われている, 微分型の非線型項と Hartree 型の非線型項を合わせた形になっている.

次に, 初期値問題 (MS) を解析する上で基本的な情報となる, 保存則及びスケーリング則について述べる.

補題 2.1. u を (MS) の解とする. このとき $t \geq 0$ に対し,

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}.$$

証明. 方程式 (2.1), (2.2) にそれぞれ $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ を掛けて $\mathbf{R}^2$ 上積分し虚部をとる. このとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Big(2i\int \boldsymbol{A}[u]\cdot(\nabla u_j)\,\overline{u}_j dx\Big) &= \int \boldsymbol{A}[u]\cdot\nabla|u_j|^2 dx \\ &= -\int(\mathrm{div}\boldsymbol{A}[u])|u_j|^2 dx = 0\end{aligned}$$

が成り立つことと, A_0, $|\boldsymbol{A}[u]|^2$ が実数値であることから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|u_1(t)\|_{L^2}^2 &= 4\int \mathrm{Im}(u_2\overline{u}_1)\mathrm{Re}(u_2\overline{u}_1)dx, \\ \frac{1}{2}\partial_t\|u_2(t)\|_{L^2}^2 &= 4\int \mathrm{Im}(u_1\overline{u}_2)\mathrm{Re}(u_1\overline{u}_2)dx\end{aligned}$$

が得られる. 両辺を足し合わせると右辺は相殺するので $\partial_t\|u(t)\|_{L^2}^2 = 0$ が得られる. □

一方, 方程式 (2.1), (2.2) は $\lambda > 0$ に対し, スケール変換

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

で不変である. 即ち, u が方程式 (2.1), (2.2) の解ならば上で定義される u_λ も (2.1), (2.2) の解となる. このことは実際,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}[u_\lambda](t,x) &= \lambda\boldsymbol{A}[u](\lambda^2 t, \lambda x), \\ A_0[u_\lambda](t,x) &= \lambda^2 A_0[u](\lambda^2 t, \lambda x)\end{aligned}$$

となることから容易に確かめられる. 本稿では, 初期値問題 (MS) を Sobolev 空間 H^s の枠組みで考察するが, このスケール変換で不変な初期値の空間は $H^0(\mathbf{R}^2) = L^2(\mathbf{R}^2)$ なので, 初期値問題 (MS) の適切性に関する臨界的な空間は $L^2(\mathbf{R}^2)$ となることが, スケーリングに関する議論から予想される.

そこで, 以下では初期値を $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^2)$ とし, 出来るだけ小さな $s \geq 0$ に対し (MS) の時間局所適切性を考察する.

注意 **2.2.** u_j は (1.9) により元の Schrödinger map z の一階微分として定まっているので, (MS) の H^s での適切性は元の Schrödinger map (1.4) の H^{s+1} での適切性に対応している. 特に, 補題 2.1 の L^2 保存則は, 元の Schrödinger map (1.4) のエネルギー保存 (1.6) に対応している.

(MS) の適切性に関しては, Nahmod-Stefanov-Uhlenbeck [13] により, $s>1$ に対し $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^2)$ ならば, 一意な時間局所解 $u \in C([0,T];\, H^s)$ が存在することが示されている. それを改善する結果として [8] では次のような結果が得られた.

定理 **2.3.** $s>1/2$ に対し $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^2)$ とする. このとき $T=T(\|u\|_{H^s})>0$ が存在して, (MS) の解 $u \in L^\infty(0,T;\, H^s) \cap C_w([0,T];\, H^s)$ で

$$J^\delta u \in L^p(0,T;\, L^q)$$

を満たすものが存在する. 但し, $J=(I-\Delta)^{1/2}$ であり, δ, p, q はそれぞれ $s-1/2>\delta>2/q>0$, $1/p=1/2-1/q$ を満たすものとする.

注意 **2.4.** $s>1/2$ での解の存在に関しては, Kenig-Nahmod が Ishimori system に対し, modified Schrödinger map に相当するものを構成し, 同様の結果を示している.

定理 2.3 では解の一意性は得られていないが, $s=1$ ならば解の一意性も示すことが出来る.

定理 **2.5.** $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^2)$ とする. このとき $T=T(\|u\|_{H^1})>0$ が存在して, (MSM) の解 $u \in C(0,T;\, H^1)$ で

$$J^\delta u \in L^p(0,T;\, L^q)$$

を満たすものが存在する. 但し, δ, p, q はそれぞれ $1/2>\delta>2/q>0$, $1/p=1/2-1/q$ を満たすものとする.

定理 2.3, 2.5 は共に, エネルギー法により解の先験的評価を構成し, コンパクト性によって, 滑らかな近似解の部分列の極限として解の存在を示すという方法で示される. その際, 定理 2.5 では $\|u\|_{L^\infty(0,T;\, H^1)}$ の先験的評価が得られるが, その解の H^1 ノルムに関

する先験的評価を利用して, 方程式の非線型項 $i\boldsymbol{A}[u]\cdot\nabla u$ の 1 階微分を制御できるため, 2 つの解 u, v の差の評価

$$\|u(t)-v(t)\|_{L^2}\le C_T\|u(0)-v(0)\|_{L^2}$$

を示すことが出来る. 従って定理 2.5 では近似解の部分列の選び方によらず解が一意に定まることになる.

注意 2.6. 最近 Herbert Koch 氏 (Dortmund 大学) との共同研究により $s>3/4$ ならば定理 2.3 で構成される解は一意に定まることが示された.

定理 2.3, 2.5 の証明のポイントとなる解の先験的評価に関しては, まず, 古典的なエネルギー評価を用いる方法では, 良く知られているように, Sobolev の埋蔵 $\|\nabla u\|_{L^\infty}\lesssim\|u\|_{H^s}$, $s>2$ に対応して, $s>2$ のとき先験的評価 $\|u\|_{L^\infty(0,T\,H^s)}\le C\|u_0\|_{H^s}$ が得られる (注意 3.2 参照). 一方, 今回用いるエネルギー評価 (命題 3.1) では, $\boldsymbol{A}[u]\sim D^{-1}|u|^2$ となっていることを利用して, 古典的なエネルギー評価に現れる $\|\nabla u\|_{L^\infty}$ を $\|u\|_{L^\infty}$ とすることができ, 1 階だけ微分を得することができる. 従って, $s>1$ のとき先験的評価 $\|u\|_{L^\infty(0,T\,H^s)}\le C\|u_0\|_{H^s}$ が得られることになる (注意 3.3 参照). これが丁度 Nahmod-Stefanov-Uhlenbeck [13] の結果と対応するものである. 以上のエネルギー評価のみによる議論は, 方程式 (2.1), (2.2) において, Δu_j の項がなくても成立する. 今回の結果を示す上で重要な役割を果たす Strichartz 型評価 (命題 4.1) は, その意味では Δu_j の項によって生じる解の平滑化を捉えた評価であると言える. その Strichartz 型評価を用いることで, 更に 1/2 階だけ微分を稼ぐことが出来ることを示したことが今回の結果のポイントとなる.

以下では簡単のため, 方程式 (2.1), (2.2) の変わりに, 方程式

$$\begin{aligned} i\partial_t u+\Delta u&=i\boldsymbol{A}[u]\cdot\nabla u,\quad (t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}^2,\\ A_j[u]&=G_j*|u|^2,\quad j=1,2\end{aligned}\tag{2.8}$$

に関して解の先験的評価の導出を解説する. 尚, 方程式 (2.1), (2.2) に関してもほぼ同様の結果が成り立つ ([8] 参照). 以下, 3 節では先験的評価を示す基礎となるエネルギー評価について述べる. 4 節では $s>1/2$ での先験的評価を示す際に重要な役割を果

たす Strichartz 型評価について述べる. 5 節では 3 節, 4 節で示したエネルギー評価, Strichartz 型評価を基に解の先験的評価を示す.

3 エネルギー評価

この節では解の先験的評価を示すための基礎となる, エネルギー評価について述べる. 以下では, A, $B \geq 0$ に対し, ある定数 $C > 0$ が存在して $A \leq CB$ であるとき $A \lesssim B$ と表す. 更に, $A \lesssim B$ かつ $B \lesssim A$ であるとき $A \sim B$ と表す. また, $\|v\|_{L^\infty_T H^s_x} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_{H^s}$, $\|v\|_{L^p_T L^q_x} = (\int_0^T \|v(t)\|^p_{L^q_x} dt)^{1/p}$ とする.

命題 3.1. $s \geq 0$ に対し, $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^2)$ とする. このとき u が (2.8) の解ならば, $T > 0$ に対し以下の評価が成り立つ.

$$\|u\|_{L^\infty_T H^s_x} \leq \|u_0\|_{H^s} \exp\bigl(CT^{2/q}\|J^\delta u\|^2_{L^p_T L^q_x}\bigr). \tag{3.1}$$

但し, $\delta > 2/q > 0$, $1/p = 1/2 - 1/q$.

注意 3.2. 前節の最後で指摘したように, この種の評価を示す際に標準的に用いられる Kato-Ponce の交換子評価を適用した場合は, 以下で示す (3.2) の変わりに

$$\begin{aligned}\partial_t\|u(t)\|^2_{\dot{H}^s} \lesssim \|\nabla \boldsymbol{A}[u](t)\|_{L^\infty}\|u(t)\|^2_{\dot{H}^s} \\ + \|\boldsymbol{A}[u](t)\|_{\dot{H}^s}\|\nabla u(t)\|_{L^\infty}\|u(t)\|_{\dot{H}^s}\end{aligned}$$

が得られる. そのため (3.1) の右辺に現れる u のノルムは空間変数に関しては, $\|\nabla u\|_{L^\infty}$ となる (正確には, $\|J^{1+\delta}u\|_{L^q}$). 上の命題では, 非線型項が特に $\boldsymbol{A}[u] \sim D^{-1}|u|^2$ という型の因子をもつことを利用することで, 1 階だけ微分を得した評価が得られている.

注意 3.3. $s > 1$ を仮定する場合, Sobolev の埋蔵 $\|J^\delta u\|_{L^q} \lesssim \|u\|_{H^s}$ (δ, q が $s - 1 \geq \delta - 2/q$ を満たせば成立) により,

$$\|u\|_{L^\infty_T H^s_x} \leq \|u_0\|_{H^s} \exp\bigl(CT\|u\|_{L^\infty_T H^s_x}\bigr)$$

と評価が閉じるので, エネルギー評価から直ちに解の先験的評価 $\|u\|_{L^\infty_T H^s_x} \leq C\|u_0\|_{H^s}$ が得られる.

命題 3.1 の証明の概略. 評価 (3.1) は, (2.8) の解 u に対する次の評価

$$\begin{aligned}\partial_t\|u(t)\|_{\dot H^s}^2 \lesssim \|\nabla \boldsymbol{A}[u](t)\|_{L^\infty}\|u(t)\|_{\dot H^s}^2 \\ + \|\nabla \boldsymbol{A}[u](t)\|_{\dot H^s}\|u(t)\|_{L^\infty}\|u(t)\|_{\dot H^s}\end{aligned} \tag{3.2}$$

を用いることで示される. 但し, $\|u\|_{\dot H^s} = \|D^s u\|_{L^2}$, $D = (-\Delta)^{1/2}$. 実際, この評価が成り立つことを認めれば, $\nabla \boldsymbol{A}[u]$ についての評価

$$\|\nabla \boldsymbol{A}[u]\|_{L^\infty} \lesssim \|u\|_{L^\infty}\|J^\delta u\|_{L^q}, \quad \delta > 2/q, \tag{3.3}$$

$$\|\nabla \boldsymbol{A}[u]\|_{\dot H^s} \lesssim \|u\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot H^s} \tag{3.4}$$

及び Sobolev の埋蔵 $\|u\|_{L^\infty} \lesssim \|J^\delta u\|_{L^q}$, $\delta > 2/q$ により

$$\partial_t\|u(t)\|_{\dot H^s}^2 \lesssim \|J^\delta u(t)\|_{L^q}^2\|u(t)\|_{\dot H^s}^2$$

が得らる. 最後に, Gronwall の不等式を適用して得られた評価と, L^2 保存則を合わせて求める評価 (3.1) が得られる. 因に, $\nabla \boldsymbol{A}[u]$ に関する評価 (3.3), (3.4) は,

$$\partial_j A_k[u] = C R_j R_{k'} |u|^2 \tag{3.5}$$

と表せることから, Riesz 変換 R_j の L^r 有界性, $1 < r < \infty$ により得られる. 但し, k' は $k = 1$ のとき 2, $k = 2$ のとき 1 を表すものとする.

以下, 評価 (3.2) の証明の概略を述べるが, そのために記号をいくつか用意する. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ は $|\xi| \le 1/2$ ならば $\varphi(\xi) = 1$, $|\xi| > 3/4$ ならば $\varphi(\xi) = 0$ を満たすものとする. このとき, $\psi(\xi) = \varphi(\xi/2) - \varphi(\xi)$ により ψ を定め, $j \in \mathbf{Z}$ に対し, $\varphi_j(\xi) = \varphi(\xi/2^{j+1})$, $\psi_j(\xi) = \psi(\xi/2^j)$ とおく. このとき, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \{|\xi| \le 2^{j-1}\}$, $\operatorname{supp}\psi_j \subset \{2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\}$ であり, 例えば $\varphi_0 + \sum_{j=1}^\infty \psi_j = 1$, $\xi \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ に対し $\sum_{j=-\infty}^\infty \psi_j(\xi) = 1$ となることに注意しておく. そこで, $S_j f = \mathcal{F}^{-1}\varphi_j \mathcal{F} f$ により S_j を, $P_j f = \mathcal{F}^{-1}\psi_j \mathcal{F} f$ により P_j を定義する. 但し, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ Fourier 変換, 逆 Fourier 変換を表す. 更に, $P_{>k} = \sum_{j>k} P_j$ などのように定義する. このとき,

$$\|u\|_{\dot H^s} \sim \Big(\sum_{j=-\infty}^\infty \|P_j u\|_{\dot H^s}^2\Big)^{1/2} \sim \Big(\sum_{j=-\infty}^\infty 2^{2sj}\|P_j u\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}$$

が成り立つ.

まず, 方程式 (2.8) に P_j を作用させると,

$$\partial_t u_j + \Delta u_j = iP_j(\boldsymbol{A}\cdot\nabla u) \tag{3.6}$$

となる. ここで $u_j = P_j u$ とおいた. そこで (3.6) の両辺に $2^{2sj}\,\overline{u}_j$ を掛け, $\mathbf{R}^2$ 上積分して虚部をとると,

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u_j\|_{\dot{H}^s}^2 = 2^{2sj}\,\mathrm{Re}\int P_j(\boldsymbol{A}\cdot\nabla u)\,\overline{u}_j\,dx \tag{3.7}$$

が得られる. (3.7) の右辺を評価するため, $P_j(\boldsymbol{A}\cdot\nabla u)$ を以下のように分解する.

$$\begin{aligned}
P_j(\boldsymbol{A}\cdot\nabla u) &= P_j(S_{j-5}\boldsymbol{A}\cdot\nabla u) + P_j(P_{>j-5}\boldsymbol{A}\cdot\nabla u)\\
&= P_j(S_{j-5}\boldsymbol{A}\cdot P_{j-2\le\cdot\le j+2}\nabla u)\\
&\quad + P_j(P_{>j-5}\boldsymbol{A}\cdot S_{j+5}\nabla u) + P_j(P_{>j-5}\boldsymbol{A}\cdot P_{>j+5}\nabla u)\\
&= S_{j-5}\boldsymbol{A}\cdot\nabla u_j + [P_j, S_{j-5}\boldsymbol{A}]\cdot P_{j-2\le\cdot\le j+2}\nabla u\\
&\quad + P_j(P_{j-5<\cdot\le j+6}\boldsymbol{A}\cdot S_{j+5}\nabla u)\\
&\quad + \sum_{k>j+5} P_j(P_{k-2\le\cdot\le k+2}\boldsymbol{A}\cdot P_k\nabla u)\\
&\equiv I + II + III + IV.
\end{aligned}$$

ここで, 上式の 2 つ目の等号の右辺の第 1 項等については, Fourier 変換した際の関数の台の条件を考察することにより得られる. そこで, まず I については $\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ より,

$$\begin{aligned}
2^{2sj}\,\mathrm{Re}\int I\,\overline{u}_j\,dx &= 2^{2sj-1}\int S_{j-5}\boldsymbol{A}\cdot\nabla|u_j|^2 dx\\
&= -2^{2sj-1}\int (S_{j-5}\mathrm{div}\boldsymbol{A})|u_j|^2 dx = 0.
\end{aligned}$$

次に II については

$$\begin{aligned}
&[P_j, S_{j-5}\boldsymbol{A}]\cdot P_{j-2\le\cdot\le j+2}\nabla u(x)\\
&= P_j(S_{j-5}\boldsymbol{A}\cdot P_{j-2\le\cdot\le j+2}\nabla u)(x) - S_{j-5}\boldsymbol{A}\cdot P_j P_{j-2\le\cdot\le j+2}\nabla u(x)\\
&= \int \psi_j(y)\big(S_{j-5}\boldsymbol{A}(x-y) - S_{j-5}\boldsymbol{A}(x)\big)P_{j-2\le\cdot\le j+2}\nabla u(x-y)\,dy
\end{aligned}$$

より, 平均値の定理により

$$|II| \le \|\nabla S_{j-5}\boldsymbol{A}\|_{L^\infty}\int |\varphi_j(y)|\,|y|\,|P_{j-2\le\cdot\le j+2}\nabla u(x-y)|\,dy.$$

従って, Young の不等式より,

$$
\begin{aligned}
\|II\|_{L^2} &\lesssim \|S_{j-5}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^\infty}\|| \cdot |\varphi_j\|_{L^1} 2^j \|P_{j-2\le\cdot\le j+2}u\|_{L^2} \\
&\lesssim \|\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^\infty}\|P_{j-2\le\cdot\le j+2}u\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\left|2^{2sj}\,\mathrm{Re}\int II\,\overline{u}_j\,dx\right| \lesssim \|\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^\infty} 2^{sj}\|P_{j-2\le\cdot\le j+2}u\|_{L^2}\|u_j\|_{\dot{H}^s}. \tag{3.8}
$$

次に III については Hörder の不等式より,

$$
\begin{aligned}
\left|2^{2sj}\,\mathrm{Re}\int III\,\overline{u}_j\,dx\right| &\lesssim 2^{sj}\|P_{j-5<\cdot\le j+6}\boldsymbol{A}\|_{L^2}\|\nabla S_{j+5}u\|_{L^\infty}\|u_j\|_{\dot{H}^s} \\
&\lesssim 2^{sj}\|P_{j-5<\cdot\le j+6}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|u_j\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}
$$

最後に IV については,

$$
\begin{aligned}
\left|2^{2sj}\,\mathrm{Re}\int IV\,\overline{u}_j\,dx\right| &\lesssim \sum_{k>j+5} 2^{sj}\|P_{k-2\le\cdot\le k+2}\boldsymbol{A}\|_{L^2}\|P_k\nabla u\|_{L^\infty}\|u_j\|_{\dot{H}^s} \\
&\lesssim \sum_{k>j+5} 2^{-s(k-j)}\left(2^{sk}\|P_{k-2\le\cdot\le k+2}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^2}\right)\|u\|_{L^\infty}\|u_j\|_{\dot{H}^s} \\
&= \sum_{l>5} 2^{-sl}\left(2^{s(j+l)}\|P_{j+l-2\le\cdot\le j+l+2}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^2}\right)\|u\|_{L^\infty}\|u_j\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}
$$

以上をまとめると,

$$
\begin{aligned}
\partial_t\|u_j\|_{\dot{H}^s}^2 \lesssim\ & \|\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^\infty} 2^{sj}\|P_{j-2\le\cdot\le j+2}u\|_{L^2}\|u_j\|_{\dot{H}^s} \\
&+ 2^{sj}\|P_{j-5<\cdot\le j+6}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|u_j\|_{\dot{H}^s} \\
&+ \sum_{l>5} 2^{-sl}\left(2^{s(j+l)}\|P_{j+l-2\le\cdot\le j+l+2}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^2}\right)\|u\|_{L^\infty}\|u_j\|_{\dot{H}^s}
\end{aligned}
$$

が得られる. 従って, j について和をとり Hölder の不等式を適用することで,

$$
\begin{aligned}
\partial_t\|u\|_{\dot{H}^s}^2 \lesssim& \|\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^\infty}\Big(\sum_j 2^{2sj}\|P_{j-2\le\cdot\le j+2}u\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}\|u\|_{\dot{H}^s}\\
&+\|u\|_{L^\infty}\Big(\sum_j 2^{sj}\|P_{j-5<\cdot\le j+6}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^2}\Big)^{1/2}\|u\|_{\dot{H}^s}\\
&+\|u\|_{L^\infty}\Big\{\sum_j\Big(\sum_{l>5}2^{-sl}\big(2^{s(j+l)}\|P_{j+l-2\le\cdot\le j+l+2}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^2}\big)\Big)^2\Big\}^{1/2}\|u\|_{\dot{H}^s}\\
\lesssim& \|\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot{H}^s}^2+\|\nabla \boldsymbol{A}\|_{\dot{H}^s}\|u\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot{H}^s}\\
&+\|u\|_{L^\infty}\sum_{l>5}2^{-sl}\Big(\sum_j 2^{2s(j+l)}\|P_{j+l-2\le\cdot\le j+l+2}\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}\|u\|_{\dot{H}^s}\\
\lesssim& \|\nabla \boldsymbol{A}\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot{H}^s}^2+\|\nabla \boldsymbol{A}\|_{\dot{H}^s}\|u\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot{H}^s}
\end{aligned}
$$

と求める評価が得られる. □

4 Strichartz 型評価

この節では, 定理 2.3 において Nahmod-Stefanov-Uhlenbeck [13] の結果の初期値の滑らかさの条件を, 1/2 だけ改善するのに重要な役割を果たす Strichartz 型評価について述べる.

命題 4.1. $T\le 1$ とする. w を空間 2 次元における非斉次線形 *Schrödinger* 方程式

$$
i\partial_t w+\Delta w=F,\quad (t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}^2 \tag{4.1}
$$

の解とする. このとき, $s\in\mathbf{R}$, $\varepsilon'>0$, に対し次の評価

$$
\|J^s w\|_{L_T^pL_x^q}\lesssim\|w\|_{L_T^\infty H_x^{s+1/2+\varepsilon'}}+\|F\|_{L_T^2H_x^{s-1/2}} \tag{4.2}
$$

が成り立つ. 但し, $1/p=1/2-1/q$, $2\le q<\infty$.

注意 4.2. 通常の Strichartz 評価は, 空間 2 次元の場合, (4.1) の解 w と上の条件を満たす p, q に対し,

$$
\|w\|_{L_t^pL_x^q}\lesssim\|w(0)\|_{L^2}+\|F\|_{L_t^1L_x^2} \tag{4.3}
$$

という型の評価として知られている. 評価 (4.2) と比較すると, 右辺の第 1 項に関して $1/2+\varepsilon'$ だけ微分を損失している変わりに, 第 2 項に関しては $1/2$ だけ微分を回復していることがわかる.

注意 4.3. 命題 4.1 の型の Strichartz 型評価は Koch-Tzvetkov [11] により, Benjamin-Ono 方程式に対し示されている ([9] 参照).

命題 4.1 の証明. 簡単のため, $T=1$ の場合を示す. まず, S_j, P_j を前節で定めたものとするとき, $1<r<\infty$ に対し一般に

$$\|f\|_{L_x^r} \sim \left\| \left(|S_0 f|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} |P_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_x^r}$$

が成り立つ. 従って, 命題の仮定では $2<p\le\infty$, $2\le q<\infty$ であるから

$$\begin{aligned} \|J^s w\|_{L_T^p L_x^q} &\lesssim \left\| \left(|S_0 J^s w|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} |J^s P_j w|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_T^p L_x^q} \\ &\lesssim \left(\|S_0 w\|_{L_T^p L_x^q}^2 + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2sj} \|P_j w\|_{L_T^p L_x^q}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

が成り立つ. ここで, $2^{sj}\|P_j w\|_{L_T^p L_x^q}$ を評価するため, 区間 $[0,T]$ を

$$[0,T] = \cup_{k=1}^{2^j} I_k, \quad I_k = [a_k, a_{k+1}), \quad |I_k| = 2^{-j}$$

と分割する. このとき $t\in I_k$ に対し, $P_j w(t)$ は

$$P_j w(t) = U(t) P_j w(a_k) + i \int_{a_k}^{t} U(t-t') P_j F(t') dt'$$

を満たす. 但し, $U(t)=e^{it\Delta}$. 従って, a_k を初期時刻とみなして Strichartz 評価 (4.3) を適用すると,

$$\|P_j w\|_{L_{I_k}^p L_x^q} \lesssim \|P_j w(a_k)\|_{L^2} + \|P_j F\|_{L_{I_k}^1 L_x^2} \tag{4.5}$$

と評価できる. 但し, $\|\cdot\|_{L_{I_k}^p}$ は区間 I_k 上の Lebesgue 空間を表すものとする. そこで,

$p>2$ より $l^2 \hookrightarrow l^p$ がなりたつことと, (4.5) より

$$
\begin{aligned}
2^{sj}\|P_j w\|_{L^p_T L^q_x} &= 2^{sj}\Big(\sum_{k=1}^{2^j}\|P_j w\|^p_{L^p_{I_k} L^q_x}\Big)^{1/p} \\
&\le 2^{sj}\Big(\sum_{k=1}^{2^j}\|P_j w\|^2_{L^p_{I_k} L^q_x}\Big)^{1/2} \\
&\lesssim 2^{sj}\Big\{\sum_{k=1}^{2^j}\big(\|P_j w(0)\|^2_{L^2} + \|P_j F\|^2_{L^1_{I_k} L^2_x}\big)\Big\}^{1/2} \\
&\lesssim 2^{sj}\Big\{\sum_{k=1}^{2^j}\big(\|P_j w\|^2_{L^\infty_T L^2_x} + |I_k|\|P_j F\|^2_{L^2_{I_k} L^2_x}\big)\Big\}^{1/2} \\
&\lesssim 2^{sj}\big(2^j\|P_j w\|^2_{L^\infty_T L^2_x} + 2^{-j}\|P_j F\|^2_{L^2_T L^2_x}\big)^{1/2} \\
&\lesssim 2^{(s+1/2)j}\|P_j w\|_{L^\infty_T L^2_x} + 2^{(s-1/2)j}\|P_j F\|_{L^2_T L^2_x}.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

即ち, 第 2 項に関しては時間変数に関して Hölder の不等式を適用することで, 滑らかさを表す指標である, 2 の巾乗の指数を下げることが出来ている. 一方, Strichartz 評価 (4.3) より

$$
\|S_0 w\|_{L^p_T L^q_x} \lesssim \|S_0 w(0)\|_{L^2} + \|S_0 F\|_{L^1_T L^2_x}
$$

であるから, $2^{sj}\|P_j w\|_{L^p_T L^q_x}$ の評価 (4.6) と合わせて, (4.4) の右辺は

$$
\begin{aligned}
&\Big(\|S_0 w\|^2_{L^\infty_T L^2_x} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2(s+1/2)j}\|P_j w\|^2_{L^\infty_T L^2_x}\Big)^{1/2} \\
&\qquad + \Big(\|S_0 F\|^2_{L^2_T L^2_x} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2(s-1/2)j}\|P_j F\|^2_{L^2_T L^2_x}\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\varepsilon' j}\Big)^{1/2}\|w\|_{L^\infty_T H^{s+1/2+\varepsilon'}_x} \\
&\qquad + \Big\|\Big(\|S_0 F\|^2_{L^2_x} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2(s-1/2)j}\|P_j F\|^2_{L^2_x}\Big)^{1/2}\Big\|_{L^2_T} \\
&\lesssim \|w\|_{L^\infty_T H^{s+1/2+\varepsilon'}_x} + \|F\|_{L^2_T H^{s-1/2}_x}
\end{aligned}
$$

と評価できるので, 求める評価が得られる. $\square$

5 先験的評価

この節では, 命題 3.1 のエネルギー評価と命題 4.1 の Strichartz 型評価を用いて, 方程式 (2.8)

$$
\begin{aligned}
i\partial_t u + \Delta u &= i\boldsymbol{A}[u]\cdot\nabla u, \quad (t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}^2, \\
A_j[u] &= G_j * |u|^2, \quad j=1,2
\end{aligned}
$$

の解の先験的評価を示す.

定理 5.1. $\varepsilon > 0$ に対し, $u_0 \in H^{1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^2)$ とする. このとき

$$
\min\{1, C/(1+\|u_0\|_{L^2}^q)\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^q\} \le T \le 1
$$

を満たす T と $M>0$ が存在して, (2.8) の解 u に対し

$$
\|J^\delta u\|_{L_T^p L_x^q} \le M\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}, \tag{5.1}
$$

が成り立つ. 但し, $\varepsilon > \delta > 2/q > 0$, $1/p = 1/2 - 1/q$.

更に, 評価 (5.1) とエネルギー評価と合わせて, $s \ge 1/2+\varepsilon$ に対し

$$
\|u\|_{L_T^\infty H_x^s} \le \|u_0\|_{H^s}\exp\big(C\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}\big) \tag{5.2}
$$

という先験的評価も得られる. 定理 2.3, 定理 2.5 は先験的評価 (5.1), (5.2) を用いて, 初期値を正則化して構成される滑らかな近似解から, 解に収束する部分列を取り出すことで示される. 最後に, 定理 5.1 の証明の概略を述べる.

定理 5.1 の証明の概略. 評価 (5.1) を示すため, 方程式 (2.8) に対し, $s=\delta$, $F = i\boldsymbol{A}[u]\cdot\nabla u = \operatorname{div}(\boldsymbol{A}[u]u)$ として命題 4.1 を適用すると,

$$
\|J^\delta u\|_{L_T^p L_x^q} \lesssim \|u\|_{L_T^\infty H_x^{1/2+\delta+\varepsilon'}} + \|\nabla(\boldsymbol{A}[u]u)\|_{L_T^2 H_x^{-1/2+\delta}} \tag{5.3}
$$

が得られる. まず, (5.3) の右辺第 1 項についてはエネルギー評価により,

$$
\|u\|_{L_T^\infty H_x^{1/2+\varepsilon}} \le \|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}\exp\big(CT^{2/q}\|J^\delta u\|_{L_T^p L_x^q}^2\big)
$$

と評価できる．ここで，$\delta+\varepsilon'=\varepsilon$ とおいた．次に，(5.3) の右辺第 2 項については，

$$\begin{aligned}\|\nabla(\boldsymbol{A}[u]u)\|_{L_T^2 H_x^{-1/2+\delta}} &\lesssim \|\boldsymbol{A}[u]u\|_{L_T^2 H^{1/2+\delta}} \\ &\lesssim \|\boldsymbol{A}[u]\|_{L_T^2 L_x^\infty}\|u\|_{L_T^\infty H_x^{1/2+\delta}} \\ &\quad + \|D^{1/2+\delta}\boldsymbol{A}[u]\|_{L_T^\infty L_x^2}\|u\|_{L_T^2 L_x^\infty}\end{aligned}$$

と評価できる．ここで，$\boldsymbol{A}[u]$ の評価

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{A}[u]\|_{L_x^\infty} \lesssim \|u\|_{L_x^2}\|J^\delta u\|_{L^q}, \quad \delta>q/2, \\ &\|D^{1/2+\delta}\boldsymbol{A}[u]\|_{L_x^2} \lesssim \|u\|_{L_x^2}\|u\|_{\dot{H}_x^{1/2+\delta}}\end{aligned}$$

及び L^2 保存則を用いることで，(5.3) の右辺第 2 項は最終的にエネルギー評価を用いて，

$$\begin{aligned}&\|\nabla(\boldsymbol{A}[u]u)\|_{L_T^2 H_x^{-1/2+\delta}} \\ &\lesssim \|u_0\|_{L^2}\|J^\delta u\|_{L_T^2 L_x^q}\|u\|_{L_T^\infty H_x^{1/2+\delta}} \\ &\le \exp\bigl(\|u_0\|_{L^2}^2\|J^\delta u\|_{L_T^2 L_x^q}^2\bigr)\|u_0\|_{H^{1/2+\delta}}\exp\bigl(CT^{2/q}\|J^\delta u\|_{L_T^p L_x^q}^2\bigr) \\ &\le \|u_0\|_{H^{1/2+\delta}}\exp\bigl(C(1+\|u_0\|_{L^2}^2)\,T^{2/q}\|J^\delta u\|_{L_T^p L_x^q}^2\bigr)\end{aligned}$$

と評価できる．以上により，

$$\|J^\delta u\|_{L_T^p L_x^q} \le C_0\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}\exp\bigl(C_1(1+\|u_0\|_{L^2}^2)\,T^{2/q}\|J^\delta u\|_{L_T^p L_x^q}^2\bigr) \tag{5.4}$$

という評価が得られた．

そこで $K(T)=\|J^\delta u\|_{L_T^p L_x^q}^2$ とおくと，$K(T)$ は T に関して連続かつ単調増加であり，$K(0)=0$，更に (5.4) より

$$K(T) \le C_0^2\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^2\exp\bigl(2C_1(1+\|u_0\|_{L^2}^2)\,T^{2/q}K(T)\bigr) \tag{5.5}$$

を満たす．ここで，もし $0\le T\le 1$ に対し $K(T)\le C_0^2 e\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^2$ が成り立つならば定理の主張は成立する．そこで，ある $T_1\in(0,1)$ が存在して $K(T_1)>C_0^2 e\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^2$ を満たすと仮定する．このとき

$$T_0=\inf\{T>0;\ K(T)>C_0^2 e\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^2\}$$

とおくと，$T_0>0$ であり，$K(T_0)=C_0^2 e\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^2$ が成り立つ．そこで，(5.5) で $T=T_0$ とすると，

$$e \le \exp\bigl(2C_1(1+\|u_0\|_{L^2}^2)\,T_0^{2/q}C_0^2 e\|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^2\bigr).$$

従って,

$$T_0 \geq \frac{1}{(2C_0^2 C_1 e)^{q/2} \left(1 + \|u_0\|_{L^2}^2\right)^{q/2} \|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^q}$$

が得られる. 特に, $0 \leq T \leq T_0$ のとき $K(T) \leq K(T_0) = C_0^2 e \|u_0\|_{H^{1/2+\varepsilon}}^2$ が成り立つ. □

参考文献

[1] L. Bergé, A. de Bouard, J. C. Saut, Blowing up time-dependent solutions of the planar, Chern-Simons gauged nonlinear Schrödinger equation, Nonlinearity **8** (1995), 235–253.

[2] N.-H. Chang, J. Shatah, K. Uhlenbeck, Schödinger maps, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), 590–602.

[3] M. Daniel, K. Porsezian, M. Lakshmanam, On the integrability of the inhomogeneous spherically symmetric Heisenberg ferromagnet in arbitrary dimensions, J. Math. Phys. **35** (1994), 6498–6510.

[4] M. Daniel, K. Porsezian, M. Lakshmanan, Erratum: "On the integrability of the inhomogeneous spherically symmetric Heisenberg ferromagnet in arbitrary dimensions" [J. Math. Phys. **35** (1994), 6498–6510], J. Math. Phys. **37** (1996), 4768.

[5] W. Ding, Y. Wang, Local Schrödinger flow into Kähler manifolds, Sci. China Ser. A **44** (2001), 1446–1464.

[6] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, "Hamiltonian methods in the theory of solitons," Translated from the Russian by A. G. Reyman, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1987).

[7] M. G. Grillakis, V. Stefanopoulos, Lagrangian formulation, energy estimates, and the Schrödinger map problem, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 1845–1877.

[8] J. Kato, Existence and uniqueness of the solution to the modified Schrödinger map, Math. Res. Lett. (in press)

[9] C. E. Kenig, K. D. Koenig, On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations, Math. Res. Lett. **10** (2003), 879–895.

[10] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, On the initial value problem for the Ishimori system, Ann. Henri Poincaré **1** (2000), 341–384.

[11] H. Koch, N. Tzvetkov, On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^s(\mathbb{R})$, Int. Math. Res. Not. **26** (2003), 1449–1464.

[12] A. Nahmod, A. Stefanov, K. Uhlenbeck, On Schrödinger maps, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), 114–151.

[13] A. Nahmod, A. Stefanov, K. Uhlenbeck, Erratum: On Schrödinger maps [Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), 114–151], Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), 833–839.

[14] P.-L. Sulem, C. Sulem, C. Bardos, On the continuous limit for a system of classical spins, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 431–454.

[15] R. Temam, "Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis, Revised edition," Studies in Mathematics and its Applications **2**, North-Holland Publishing Co. (1979).